研究一下更一般的情形。设二元函数 $g(x,t)$ 在 $[a,b]^2$ 上有定义（$a<b$），且对 t 连续，对 x 可微，令

$$f(x)=\int_a^x g(x,t)\,\mathrm{d}\,t, x\in[a,b]$$

则

$$f'(x)=g(x,x)+\int_a^x \frac{\partial g(x,t)}{\partial x}\,\mathrm{d}\,t.$$

证明 对于 (a,b) 内的任意 x，总能取微小改变量 $\Delta x\neq 0$ 使得 $x+\Delta x\in[a,b]$，我们有

$$\begin{aligned}
f(x+\Delta x)-f(x)&=\int_a^{x+\Delta x} g(x+\Delta x,t)\,\mathrm{d}\,t-\int_a^x g(x,t)\,\mathrm{d}\,t\\
&=\int_a^{x+\Delta x} g(x,t)+g(x+\Delta x,t)-g(x,t)\,\mathrm{d}\,t-\int_a^x g(x,t)\,\mathrm{d}\,t\\
&=\int_a^{x+\Delta x} g(x,t)\,\mathrm{d}\,t-\int_a^x g(x,t)\,\mathrm{d}\,t+\int_a^{x+\Delta x} g(x+\Delta x,t)-g(x,t)\,\mathrm{d}\,t\\
&=\int_x^{x+\Delta x} g(x,t)\,\mathrm{d}\,t+\int_a^{x+\Delta x} g(x+\Delta x,t)-g(x,t)\,\mathrm{d}\,t,
\end{aligned}$$

由积分学中值定理以及可微的定义，有

$$\int_x^{x+\Delta x} g(x,t)\,\mathrm{d}\,t=g(x,x+\theta\cdot\Delta x)\cdot\Delta x,(\theta\in[0,1])$$

$$g(x+\Delta x,t)-g(x,t)=\frac{\partial g(x,t)}{\partial x}\cdot\Delta x+o(\Delta x),(\Delta x\to 0)$$

那么

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=g(x,x+\theta\cdot\Delta x)+\int_a^{x+\Delta x}\frac{\partial g(x,t)}{\partial x}+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\,\mathrm{d}\,t,(\Delta x\to 0)$$

故此

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0} g(x,x+\theta\cdot\Delta x)+\lim_{\Delta x\to 0}\int_a^{x+\Delta x}\frac{\partial g(x,t)}{\partial x}+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\,\mathrm{d}\,t\\
&=g(x,x)+\int_a^x\frac{\partial g(x,t)}{\partial x}\,\mathrm{d}\,t.
\end{aligned}$$

□