如何用空间向量求解二面角

刘记乾

(河南省长垣一中, 453400)

求解二面角大小的方法很多,单就教师在课堂上所授方法而言就有定义法、三垂线法、垂面法、射影法、向量法等若干种. 而这些方法中最简单易学的就是向量法,但在实际教学测试中笔者发现学生利用向量法求解二面角时容易与实际相差一个“π”角度,究其原因应是对向量法的源头不尽了解所致. 本文试图从向量法求解二面角的源头入手,给出二面角的内(外)“侧”的概念,结合示例具体讲解,以期学生在应用中有所突破.

一、两非零向量之间的夹角

(人教 A版)第一册(下)第 118页:已知两个非零向量 a和 b(如图 1),作 $\overrightarrow{OA}=a$, $\overrightarrow{OB}=b$. 则 $\angle AOB=\theta(0\le\theta\le\pi)$ 叫做向量 a和 b的夹角.

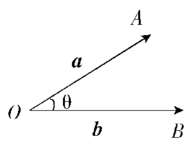

图 1

(人教 A版)第二册(下 B)第 36页:如图 2,已知两个非零向量 a, b,在空间任取一点 O,作 $\overrightarrow{OA}=a$, $\overrightarrow{OB}=b$,则 $\angle AOB$ 叫做向量 a与 b的夹角,记作 $\langle a, b\rangle$,规定 $0\le\langle a, b\rangle\le\pi$.

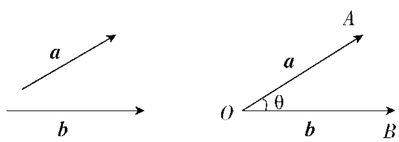

图 2

以上定义虽略有不同,但均强调了在计算两非零向量之间的夹角时两非零向量必须放于同一起点.

二、二面角的内(外)“侧”的概念

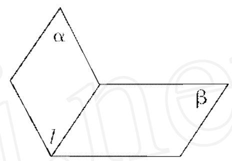

图 3

对如图 3所示的二面角 $\alpha-l-\beta$,我们称 $\alpha-l-\beta$ 所“包”的部分为该二面角的“内侧”(也称半平面 α, β的内侧),其外部称为“外侧”(也称半平面 α, β的外侧).

三、二面角与法向量夹角的关系

平面的法向量:如果 $n\perp\alpha$,那么称 n为平面 α的一个法向量.

在图 4中, $n_1\perp\alpha$, $n_2\perp\beta$,在图 5中, $n_1\perp\alpha$, $n_2\perp\beta$. 图 4中我们称 n_1 指向平面 α的“内侧”, n_2 指向平面 β的“外侧”;图 5中 n_1 指向平面 α的“内侧”, n_2 指向平面 β的“内侧”.

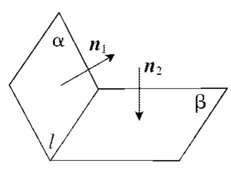

图 4

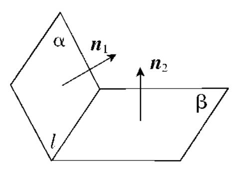

图 5

在图 4中,二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小为 $\langle n_1, n_2\rangle$.

在图 5中,二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小为 $\pi-\langle n_1, n_2\rangle$.

结论　若二面角的两个半平面的法向量

同时指向两个半平面的同一侧,则二面角大小与 $\langle n_1, n_2\rangle$ 互补,若分别指向异侧(即一个指向内侧一个指向外侧)则二面角大小即为 $\langle n_1, n_2\rangle$.

四、应用

例1 (2008年全国高考题)如图6,正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AA_1=2AB=4$,点 E 在 CC_1 上且 $EC_1=3EC$.

(1) 证明:$A_1C\perp$ 平面 BED;

(2) 求二面角 A_1-DE-B 的大小.

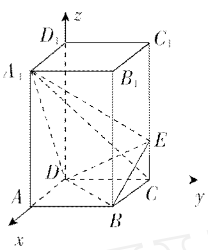

图6

解 以 D 为坐标原点,如图6建立空间直角坐标系,则 $A_1(2,0,4)$,$C(0,2,0)$,$B(2,2,0)$,$E(0,2,1)$,

$\overrightarrow{DE}=(0,2,1)$,$\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$,

$\overrightarrow{A_1C}=(-2,2,-4)$,$\overrightarrow{DA_1}=(2,0,4)$.

(1) $\because \overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{DB}=0$,$\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{DE}=0$,

$\therefore A_1C\perp BD$,$A_1C\perp DE$.

又 $DB\cap DE=D$.

$\therefore A_1C\perp$ 平面 DBE.

(2) 由(1),$\overrightarrow{A_1C}\perp$ 平面 DBE 且指向平面 DBE 外侧,取 $\overrightarrow{A_1C}$ 为平面 DBE 的法向量,

设平面 A_1DE 时法向量为 $n_1=(x,y,z)$,则

$$n_1\perp\overrightarrow{DE},\ n_1\perp\overrightarrow{DA_1},$$

$$\therefore\begin{cases}2y+z=0,\\2x+4z=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x=-2z,\\y=-\dfrac{1}{2}z,\end{cases}$$

取 $z=-2$,则 $x=4$,$y=1$. $n=(4,1,-2)$ 且指向平面 A_1DE 内侧.

设二面角 A_1-DE-B 大小为 θ,则 $\theta=\langle n_1,\overrightarrow{A_1C}\rangle$,且

$$\cos\theta=\cos\langle n_1,\overrightarrow{A_1C}\rangle=\frac{\sqrt{14}}{42},$$

$$\therefore\theta=\arccos\frac{\sqrt{14}}{42}.$$

评析 在实际应用时,学生往往不注意平面法向量的指向,导致以下失误:

在得到 $x=-2z$,$z=-2y$ 之后,

取 $y=-1$,则 $z=2$,$x=-4$.

$\therefore n=(-4,-1,2)$,设二面角 A_1-DE-B 大小为 θ,

$$\therefore\cos\theta=\cos\langle n_1,\overrightarrow{A_1C}\rangle=\frac{n\cdot\overrightarrow{A_1C}}{|n||\overrightarrow{A_1C}|}$$

$$=-\frac{\sqrt{14}}{42}.$$

$$\therefore\theta=\pi-\arccos\frac{\sqrt{14}}{42}.$$

究其原因:在取 $y=-1$ 得 $n=(-4,-1,2)$ 之后并没有判断 n 到底指向平面 A_1DE 的哪一侧?实际上在得到 $n=(-4,-1,2)$ 后我们发现 n 指向平面 A_1DE 的外侧,此时应有

$$\theta=\pi-\langle n,\overrightarrow{A_1C}\rangle.$$

由 $\cos\langle n,\overrightarrow{A_1C}\rangle=\dfrac{n\cdot\overrightarrow{A_1C}}{|n||\overrightarrow{A_1C}|}=-\dfrac{\sqrt{14}}{42}$.

$$\therefore\cos\theta=\cos[\pi-\langle n_1,\overrightarrow{A_1C}\rangle]$$

$$=-\cos\langle n_1,\overrightarrow{A_1C}\rangle=\frac{\sqrt{14}}{42},$$

$$\therefore\theta=\arccos\frac{\sqrt{14}}{42}.$$

由此可见判断法向量指向的重要性,它决定了这种方法的成败!

例2 (2009年全国高考题)如图7,四棱锥 $S-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为矩形,$SD\perp$ 底面 $ABCD$,$AD=\sqrt{2}$,$DC=SD=2$,点 M 在侧棱 SC 上,$\angle ABM=60°$.

(1) 证明:M 为侧棱 SC 的中点;

(2) 求二面角 $S-AM-B$ 的大小.

解 分别以 DA,DC,DS 为 x,y,z 轴,如图8建立空间直角坐标系 $D-xyz$,则 $A(\sqrt{2},0,0)$,$B(\sqrt{2},2,0)$,$C(0,2,0)$,$S(0,0,2)$.

(1) 设 $M(0,a,b)(a>0,b>0)$,则

$\overrightarrow{BA}=(0,-2,0)$,$\overrightarrow{BM}=(-\sqrt{2},a-2,b)$,

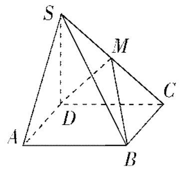

图 7

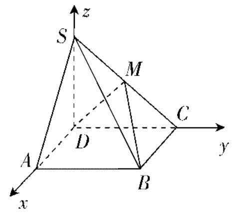

图 8

$\overrightarrow{SM}=(0,a,b-2)$, $\overrightarrow{SC}=(0,2,-2)$.

由题意有 $\begin{cases}\cos\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM}\rangle=\dfrac{1}{2},\\ \overrightarrow{SM}\parallel\overrightarrow{SC},\end{cases}$

即 $\begin{cases}\dfrac{-2(a-2)}{2\sqrt{(a-2)^2+b^2+2}}=\dfrac{1}{2},\\ -2a=2(b-2),\end{cases}$

解之,得 $a=1$, $b=1$,即 $M(0,1,1)$,所以 M是侧棱 SC的中点.

(2) 由 (1) 得 $M(0,1,1)$, $\overrightarrow{MA}=(\sqrt{2},-1,-1)$,又 $\overrightarrow{AS}=(-\sqrt{2},0,2)$, $\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$,

设 $n_1=(x_1,y_1,z_1)$, $n_2=(x_2,y_2,z_2)$ 分别是平面 SAM, MAB 的法向量,则

$\begin{cases}n_1\cdot\overrightarrow{MA}=0,\\ n_1\cdot\overrightarrow{AS}=0,\end{cases}$ $\begin{cases}n_2\cdot\overrightarrow{MA}=0,\\ n_2\cdot\overrightarrow{AB}=0.\end{cases}$

即 $\begin{cases}\sqrt{2}x_1-y_1-z_1=0,\\ -\sqrt{2}x_1+2z_1=0,\end{cases}$

$\begin{cases}\sqrt{2}x_2-y_2-z_2=0,\\ 2y_2=0.\end{cases}$

分别令 $x_1=x_2=\sqrt{2}$得 $z_1=1$, $y_1=1$, $y_2=0$, $z_2=2$,即

$n_1=(\sqrt{2},1,1)$ 且指向平面 SAM 内侧,

$n_2=(\sqrt{2},0,2)$ 且指向平面 MAB 内侧.

设二面角 $S-AM-B$ 的大小为 θ,则

$$\theta=\pi-\langle n_1,n_2\rangle.$$

又 $\because\cos\langle n_1,n_2\rangle=\dfrac{2+0+2}{2\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,

$\therefore\cos\theta=\cos[\pi-\langle n_1,n_2\rangle]=-\cos\langle n_1,n_2\rangle=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

$\therefore$二面角 $S-AM-B$ 的大小为

$$\pi-\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

评析　笔者在指导学生复习时,发现很多同学在见到此题后第一反应是用空间向量法,但在实际做到 $\cos\langle n_1,n_2\rangle=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$后,却在判断二面角 $S-AM-B$到底是 $\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{3}$还是 $\pi-\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{3}$时犯了难,而上述解法则完全避免了此类情况的发生且论据充分,一目了然.

例 3　(2008年北京高考题)如图 9,在三棱锥 $P-ABC$中, $AC=BC=2$, $\angle ACB=90°$, $AP=BP=AB$, $PC\perp AC$.

(1) 求证: $PC\perp AB$;

(2) 求二面角 $B-AP-C$的大小;

(3) 求点 C到平面 APB的距离.

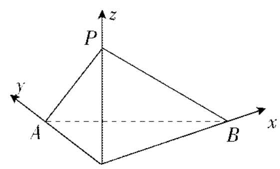

图 9

解　(1) $\because AC=BC$, $AP=BP$,

$\therefore\triangle APC\cong\triangle BPC$.

又 $PC\perp AC$,故 $PC\perp BC$.

$\because AC\cap BC=C$,

$\therefore PC\perp$平面 ABC.

$\because AB\subset$平面 ABC,

$\therefore PC\perp AB$.

(2) 如图 9,以 C为原点建立空间直角坐标系 $C-xyz$ 则 $C(0,0,0)$, $A(0,2,0)$, $B(2,0,0)$, $P(0,0,2)$.

$\therefore\overrightarrow{CB}=(2,0,0)$, $\overrightarrow{AB}=(2,-2,0)$, $\overrightarrow{AP}=(0,-2,2)$.

$\because\overrightarrow{CB}\perp\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}\perp\overrightarrow{PC}$,

$\therefore\overrightarrow{CB}$为平面 APC的法向量,指向平面 APC的内侧,

设 $n=(x,y,z)$为平面 PAB的法向量,则由

(下转第 12页)

枚都正面向上的概率.

分析　解决本题的关键同样是将样本空间看成{正正、正反、反反}还是看成{正正、正反、反正、反反}.我们知道实际上每枚硬币的每个面向上是等可能的,因此一号硬币正而二号硬币反和一号硬币反而二号硬币正是不同的两个基本事件,所以样本空间应看成{正正、正反、反正、反反},概率应为 $P(A)=\frac{1}{4}$.

二、在等可能的前提下注意结果的有限性

古典概型与几何概型都要求基本事件是等可能的,两者的主要区别是古典概型的基本事件的个数是有限的,而几何概型的基本事件则是无限的.

例3　若点 (p,q),在 $|p|\leq 3$, $|q|\leq 3$ 中按均匀分布出现.

(1)点 $M(x,y)$ 的横坐标与纵坐标分别由掷骰子确定,第一次确定横坐标,第二次确定纵坐标,求点 $M(x,y)$ 落在上述区域内的概率;

(2)试求方程 $x^2+2px-q^2+1=0$ 有两个实数根的概率.

分析　对于第(1)题我们不能一看到和几何图形有关,就认为是几何概型,注意古典概型的第二个特点,本题中点的横、纵坐标分别由掷骰子确定,共有36个等可能的基本事件,基本事件的个数是有限的,因此概率模型为古典概型, $P(A)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$.

第(2)题,方程 $x^2+2px-q^2+1=0$ 有两个实数根, $\Delta=4p^2+4q^2-4\geq 0$, p,q 的解有无数多个,所以概率模型为几何概型,测度为面积,满足 $|p|\leq 3$, $|q|\leq 3$ 的点 (p,q) 组成了一个边长为6的正方形,而满足 $\Delta=4p^2+4q^2-4\geq 0$,即 $p^2+q^2\geq 1$ 的点 (p,q) 组成单位圆外正方形内的部分,故 $P(A)=\frac{36-\pi}{36}$.

总之,如果我们在学习古典概型时,能正确认识处理好上述两个方面的问题,则对于我们准确把握古典概型就很有帮助.

(上接第15页)

$$\begin{cases} n\cdot\overrightarrow{AB}=0, \\ n\cdot\overrightarrow{AP}=0, \end{cases} \text{得} \begin{cases} 2x-2y=0, \\ -2y+2z=0. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=y, \\ z=y. \end{cases}$

取 $y=1$,则 $n=(1,1,1)$ 指向平面 PAB 的外侧.

设二面角 $B-AP-C$ 大小为 θ,则 $\theta=\langle n,\overrightarrow{CB}\rangle$.

$$\cos\theta=\cos\langle n,\overrightarrow{CB}\rangle=\frac{n\cdot\overrightarrow{CB}}{|n||\overrightarrow{CB}|}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore\theta=\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(3) $\because AC=BC=PC$,

$\therefore C$ 在平面 APB 内的射影为正 $\triangle APB$ 的中心 H,且 CH 的长为点 C 到平面 APB 的距离.

如(2)建立空间直角坐标系 $C-xyz$ 则点 H 的坐标为 $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$,

$$\therefore|\overrightarrow{CH}|=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$\therefore$点 C 到平面 APB 的距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

评析　在利用空间向量法求解二面角时一不留神就易出错,以上三例则完全避免了相差的一个"π"角度,由此可见判断法向量指向的重要性,因此在高考中利用空间向量法求解二面角时需慎之又慎.