$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2+\cos(n+\theta)}} = +\infty}$$

Bernard Brighi

La question de savoir si la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2+\cos n}}$$

converge ou diverge, n'est pas une question facile. On sent bien que la réponse est liée à la répartition des $\cos n$ dans l'intervalle $[-1, 1]$. La preuve que nous donnons ici de la divergence de cette série est aux frontiéres de la Théorie des Nombres et de l'Analyse.

1 Approximations rationnelles.

Une *approximation rationnelle*[1] d'un nombre réel α est une fraction irréductible p/q (avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$) telle que :

$$|q\alpha - p| < \frac{1}{q}.$$

Remarque 1 . — Pour tout $q \geq 2$ il existe au plus un entier p tel que $\frac{p}{q}$ soit une approximation rationnelle de α.

Le résultat suivant, qui est une variante d'un théorème de Peter-Gustav DIRICHLET (1805-1859), affirme que tout irrationnel possède une suite d'approximations rationnelles, dont les dénominateurs tendent vers $+\infty$.

[1] Nous reprenons ici une définition utilisée par P. Deligne [1].

Théorème 2. — *Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; il existe une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'entiers relatifs et une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'entiers positifs tel que* :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |q_n\alpha - p_n| < \frac{1}{q_n}, \quad (p_n, q_n) = 1 \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to+\infty} q_n = +\infty.$$

DÉMONSTRATION. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, notons $\alpha_k = k\alpha - E(k\alpha)$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x. Ces $n+1$ nombres réels appartiennent à $[0,1[$. Puisque

$$[0,1[= \bigcup_{\ell=1}^{n} \left[\frac{\ell-1}{n}, \frac{\ell}{n}\right[$$

il existe $\ell_n \in \{1, \dots, n\}$ et $i_n, j_n \in \{0, \dots, n\}$ tels que $i_n < j_n$ et

$$\alpha_{i_n}, \alpha_{j_n} \in \left[\frac{\ell_n - 1}{n}, \frac{\ell_n}{n}\right[.$$

Posons alors $b_n = j_n - i_n$ et $a_n = E(j_n\alpha) - E(i_n\alpha)$. On a $b_n \geq 1$ et :

$$|b_n\alpha - a_n| = |\alpha_{j_n} - \alpha_{i_n}| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{b_n}.$$

Si $d \geq 1$ est le plus grand commun diviseur de a_n et b_n, on pose $p_n = d^{-1}a_n$ et $q_n = d^{-1}b_n$; on a alors :

$$|q_n\alpha - p_n| = \frac{1}{d}\,|b_n\alpha - a_n| < \frac{1}{dn} < \frac{1}{db_n} = \frac{1}{d^2q_n} < \frac{1}{q_n}.$$

Il reste à montrer que $q_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. Pour cela, considérons, pour tout $A > 0$ l'ensemble :

$$\mathrm{I}_A = \{n \in \mathbb{N}^* \; ; \; q_n \leq A\}.$$

Si I_A est de cardinal infini, alors il existe $q \leq A$ et une suite croissante d'entier $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on ait : $q_{n_k} = q$. Il s'ensuit que l'on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad q\alpha - \frac{1}{n_k} < p_{n_k} < q\alpha + \frac{1}{n_k}. \tag{1}$$

Il en résulte que la suite d'entiers (p_{n_k}) converge et donc il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$ tels que, pour tout $k \geq k_0$, on ait : $p_{n_k} = p$. En faisant tendre k vers $+\infty$ dans (1), on obtient une contradiction avec le fait que α est irrationnel. Par conséquent, I_A est de cardinal fini ; si l'on note n_A son plus grand élement, alors pour tout $n > n_A$ on a $q_n > A$. Ainsi : $q_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. □

2 L'inégalité de Denjoy-Koksma.

Dans ce paragraphe, nous allons maintenant démontrer, dans le cas d'une fonction de classe C^1, une inégalité due à Arnaud DENJOY (1884-1974) et Jurjen Ferdinand KOKSMA (1904-1964). Avant cela, nous montrons un lemme en rapport avec la variation d'une fonction de classe C^1.

Lemme 3 . — *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit $x \in [a,b]$. On a :*

$$\left| (b-a)f(x) - \int_a^b f(t)dt \right| \leq (b-a) \int_a^b |f'(t)|dt. \tag{2}$$

DÉMONSTRATION. — On a :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)dt &= \int_a^x f(t)dt + \int_x^b f(t)dt \\ &= (x-a)f(x) - \int_a^x (t-a)f'(t)dt - (x-b)f(x) - \int_x^b (t-b)f'(t)dt \\ &= (b-a)f(x) - \int_a^x (t-a)f'(t)dt - \int_x^b (t-b)f'(t)dt\end{aligned}$$

D'où :

$$\left| (b-a)f(x) - \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^x |(t-a)f'(t)|dt + \int_x^b |(t-b)f'(t)|dt$$

et (2) en résulte. □

Théorème 4 . — (Inégalité de Denjoy-Koksma) *Soit $z \in \mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, périodique de période 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et soit p/q une approximation rationnelle de α. Pour tout entier $n \in \{0, \dots, q-1\}$, posons $x_n = n\alpha - E(n\alpha)$. On a* :

$$\left| \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{q} \sum_{n=1}^{q} f(z + x_n) \right| \leq \frac{1}{q} \int_0^1 |f'(t)|dt. \tag{3}$$

DÉMONSTRATION. — Tout d'abord, comme f est périodique de période 1, quitte à remplacer f par $t \mapsto f(t-z)$ ou par $t \mapsto f(z-t)$, on se ramène à supposer que $z = 0$ et que :

$$\frac{p}{q} \leq \alpha < \frac{p}{q} + \frac{1}{q^2}.$$

Ensuite, remarquons que, puisque α est irrationnel, les q points $x_0, \dots, x_{q-1}$ sont tous distincts. Soit $\ell \in \{1, \dots, q\}$. Comme p et q sont premiers entre eux, il existe $n \in \{0, \dots, q-1\}$ et $k \in \mathbb{Z}$ tels que : $np + kq = \ell - 1$. Par suite, on a :

$$0 \leq n\alpha - \frac{np}{q} < \frac{1}{q},$$

puis :

$$\frac{\ell - 1}{q} \leq n\alpha + k < \frac{\ell}{q}.$$

Il en résulte en particulier que $k = -E(n\alpha)$. Par conséquent, les q points $x_0, \ldots, x_{q-1}$ étant distincts, pour tout $\ell \in \{1, \ldots, q\}$, il existe un unique entier $n_\ell \in \{1, \ldots, q\}$ tel que :

$$x_{n_\ell} \in \left[\frac{\ell - 1}{q}, \frac{\ell}{q}\right[.$$

De ceci et du lemme 3, on tire :

$$\begin{aligned}\left| \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{q}\sum_{n=1}^{q} f(x_n)\right| &\leq \sum_{\ell=1}^{q}\left| \int_{\frac{\ell-1}{q}}^{\frac{\ell}{q}} f(t)dt - \frac{1}{q}f(x_{n_\ell})\right| \\ &\leq \frac{1}{q}\sum_{\ell=1}^{q}\int_{\frac{\ell-1}{q}}^{\frac{\ell}{q}} |f'(t)|dt = \frac{1}{q}\int_0^1 |f'(t)|dt.\end{aligned}$$

D'où le théorème. $\square$

3 La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2+\cos(n+\theta)}}$ diverge.

3.1 Premières estimations.

Soient a et q des entiers. On suppose que $a \geq 1$ et $q \geq 2$. D'une part, on a :

$$\sum_{n=(a-1)q+1}^{aq} \frac{1}{n^{2+\cos(n+\theta)}} \geq \sum_{n=(a-1)q+1}^{aq} \frac{1}{(aq)^{2+\cos(n+\theta)}} = \frac{1}{(aq)^2}\sum_{n=(a-1)q+1}^{aq} (aq)^{-\cos(n+\theta)}. \tag{4}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (aq)^{-\cos(2\pi t+\theta)}dt &= \int_{-\frac{\theta}{2\pi}-\frac{1}{2}}^{-\frac{\theta}{2\pi}+\frac{1}{2}} e^{\ln(aq)\cos(2\pi t+\theta+\pi)}dt \geq \int_{-\frac{\theta}{2\pi}-\frac{1}{2}}^{-\frac{\theta}{2\pi}+\frac{1}{2}} e^{\ln(aq)\left(1-\frac{1}{2}(2\pi t+\theta+\pi)^2\right)}dt \\ &= aq\int_{-\frac{\theta}{2\pi}-\frac{1}{2}}^{-\frac{\theta}{2\pi}+\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\ln(aq)(2\pi t+\theta+\pi)^2}dt = \frac{1}{2\pi}\frac{aq}{\sqrt{\ln(aq)}}\int_0^{2\pi\sqrt{\ln(aq)}} e^{-\frac{s^2}{2}}ds.\end{aligned}$$

Par conséquent, on a l'estimation suivante :

$$\int_0^1 (aq)^{-\cos(2\pi t+\theta)}dt \geq C_0\,\frac{aq}{\sqrt{\ln(aq)}} \tag{5}$$

où $C_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi\sqrt{\ln 2}} e^{-\frac{s^2}{2}}ds.$

3.2 Utilisation de l'inégalité de Denjoy-Koksma.

Soit $\alpha = \frac{1}{2\pi}$. Par le théorème 2, il existe une suite $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers positifs tendant vers $+\infty$, tel que q_k est le dénominateur d'une approximation rationnelle de α pour tout $k \in \mathbb{N}$. Notons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = n\alpha - E(n\alpha)$, puis pour tout entier k et tout entier a :

$$z_{a,k} = (a-1)q_k + 1 \qquad \text{et} \qquad f_{a,k}(x) = (aq_k)^{-\cos(2\pi x+\theta)}$$

La fonction $f_{a,k}$ est 1-périodique et de classe C^1, si bien qu'en utilisant l'inégalité de Denjoy-Koksma, on a :

$$\left| \int_0^1 f_{a,k}(t)dt - \frac{1}{q_k}\sum_{n=0}^{q_k-1} f_{a,k}(z_{a,k}+x_n) \right| \leq \frac{1}{q_k}\int_0^1 |f'_{a,k}(t)|dt \leq \frac{1}{q_k} \times 2aq_k = 2a,$$

puis, compte-tenu de (4) et (5), il vient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=(a-1)q_k+1}^{aq_k} \frac{1}{n^{2+\cos(n+\theta)}} &\geq \frac{1}{(aq_k)^2}\sum_{n=(a-1)q_k+1}^{aq_k} (aq_k)^{-\cos(n+\theta)} = \frac{1}{(aq_k)^2}\sum_{n=0}^{q_k-1} f_{a,k}(z_{a,k}+x_n) \\
&\geq \frac{1}{a^2q_k}\left\{ \int_0^1 f_{a,k}(t)dt - \left| \int_0^1 f_{a,k}(t)dt - \frac{1}{q_k}\sum_{n=0}^{q_k-1} f_{a,k}(z_{a,k}+x_n)\right| \right\} \\
&\geq \frac{1}{a^2q_k}\left\{ C_0\frac{aq_k}{\sqrt{\ln(aq_k)}} - 2a \right\} = \frac{C_0}{a\sqrt{\ln(aq_k)}} - \frac{2}{aq_k}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{{q_k}^2} \frac{1}{n^{2+\cos(n+\theta)}} &= \sum_{a=1}^{q_k}\left(\sum_{n=(a-1)q_k+1}^{aq_k} \frac{1}{n^{2+\cos(n+\theta)}} \right) \\
&\geq \sum_{a=1}^{q_k}\left(\frac{C_0}{a\sqrt{\ln(aq_k)}} - \frac{2}{aq_k} \right) \\
&\geq \left(\frac{C_0}{\sqrt{\ln({q_k}^2)}} - \frac{2}{q_k} \right)\sum_{a=1}^{q_k}\frac{1}{a}.
\end{aligned}$$

Puisque $q_k \to +\infty$ quand $k \to +\infty$, on en déduit que :

$$\sum_{a=1}^{q_k}\frac{1}{a} \sim \ln q_k \quad \text{quand} \quad k \to +\infty,$$

puis, que pour k suffisamment grand, on a

$$\sum_{n=1}^{{q_k}^2} \frac{1}{n^{2+\cos(n+\theta)}} \geq \left(\frac{C_0}{\sqrt{2\ln q_k}} - \frac{2}{q_k} \right)\frac{\ln q_k}{2} = \frac{C_0\sqrt{\ln q_k}}{2\sqrt{2}} - \frac{\ln q_k}{q_k} \to +\infty \quad \text{quand} \quad k \to +\infty.$$

Il en résulte que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2+\cos(n+\theta)}}$ diverge.

Remerciements. — L'idée de la preuve redigée ici a été proposée par Nicolas CHEVALLIER. Qu'il soit également remercié pour sa relecture attentive de celle-ci.

Références

[1] Pierre DELIGNE, *Les difféomorphismes du cercle*. Séminaire N. Bourbaki, 1975-1976, exp. n° 477, p. 99-121.