第24卷 第2期 成都大学学报(自然科学版) Vol. 24 No. 2
2005年6月 Journal of Chengdu University (Natural Science) Jun. 2005

文章编号: 1004-5422 (2005) 02-0081-03

Kantorovich 不等式的推广

续铁权

(青岛职业技术学院, 山东 青岛 266071)

摘 要: 本文的三个定理推广了 Schweitzer 不等式与 Kantorovich 不等式.

关键词: Schweitzer 不等式; Kantorovich 不等式; 凸函数; Schur-凸函数

中图分类号: 0178.1 **文献标识码**: A

1 引言与引理

文[1]介绍了两个重要不等式:

Schweitzer 不等式 若 $0 < m \le a_i \le M, i = 1, 2, \cdots, n$, 则

$$\left(\frac{1}{n}\sum a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum \frac{1}{a}\right) \le \frac{(M+m)^2}{4Mm} \qquad (1)$$

Kantorovich 不等式 若 $0 < m \le \gamma_i \le M, i = 1, 2, \cdots, n$, 则

$$\left(\sum \gamma_i u_i^2\right)\left(\sum \frac{1}{\gamma_i}u_i^2\right) \le \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}}\right)^2\left(\sum u_i^2\right)^2 \qquad (2)$$

当 $u_i = 1 (i = 1, 2, \cdots, n)$ 时, 由(2)式可得到(1)式, 所以 Kantorovich 不等式可以看作 Schweitzer 不等式的推广.

Schweitzer 不等式和 Kantorovich 不等式有多种推广形式(参看[1],[2],[3]), 本文的三个定理是 Schweitzer 不等式和 Kantorovich 不等式的指数推广.

在下文中使用的概念和记号参看[4]. 特别对于 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n$, 把它的分量排成递减的次序后记作 $x\downarrow = (x_{[1]}, x_{[2]}, \cdots, x_{[n]})$, 即 $x_{[1]} \ge x_{[2]} \ge \cdots \ge x_{[n]}$.

引理 设 $0 < m \le a_i \le M, i = 1, 2, \cdots, n$, 记 $s = \sum a_i$, 若 $M + (n-1)m \le s \le (n-1)M + m$, 则存在 $k \in N, 1 \le k \le n-1$, 使

$$(\underbrace{M, \cdots, M}_{k}, l, \underbrace{m, \cdots, m}_{m-k-1}) \succ (a_1, a_2, \cdots, a_n) \qquad (3)$$

这里 $l = s - kM - (n-k-1)m, m \le l \le M$.

此结果即为[5]中的引理2.

2 主要结果

定理1 设 $a_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n), \alpha > 0, M = max\{a_1, \cdots, a_n\}, m = min\{a_1, \cdots, a_n\}, M > m > 0$, 则

$$\left(\frac{1}{n}\sum a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum \frac{1}{a_i^\alpha}\right) \le \frac{(M^{\alpha+1} - m^{\alpha+1})^2}{4(M^\alpha - m^\alpha)(M-m)(Mm)^\alpha} \qquad (4)$$

证明 记 $S = \sum a_i$, 则 $M + (n-1)m \le s \le (n-1)M + m$, 由引理知存在 $k \in N, 1 \le k \le n-1$, 使(3)式成立. 又易证 $x^{-\alpha}$ 是 $I = (0, +\infty)$ 上的凸函数, 所以 $\sum x_i^{-\alpha}$ 是 I^n 上的 S-凸函数[4], 由(3)式知

$$\sum a_i^{-\alpha} \le k \cdot M^{-\alpha} + (n-k-1)m^{-\alpha} + l^{-\alpha},$$

这里 $l = s - kM - (n-k-1)m, m \le l \le M$. 故

$$\left(\frac{1}{n}\sum a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum a_i^{-\alpha}\right)$$
$$\le \frac{s}{n^2}\left(\frac{k}{M^\alpha} + \frac{n-k-1}{m^\alpha} + \frac{1}{l^\alpha}\right)$$
$$= \frac{kM + (n-k-1)m + l}{n^2}$$
$$\times \left[\frac{(n-k-1)M^\alpha + km^\alpha}{(Mm)^\alpha} + \frac{1}{l^\alpha}\right]$$
$$= f_k(l) \qquad (5)$$

记 $u = kM + (n-k-1)m, v = (n-k-1)M^\alpha + km^\alpha$, 则

$$f_k(l) = \frac{1}{n^2(Mm)^\alpha}[u(Mm)^\alpha l^{-\alpha} + (Mm)^\alpha l^{-\alpha+1} + vl + u v]$$

收稿日期: 2005-01-05
作者简介: 续铁权 (1937-), 男, 教授, 从事数学不等式理论研究.

计算得$f_k''(l) = \frac{\alpha}{n^2}l^{-\alpha-2}[(\alpha+1)u+(\alpha-1)l] = \frac{\alpha}{n^2}l^{-\alpha-2}(\alpha s+u-l)$,注意$m \le l \le M \le u$,$f_k''(J) > 0$. 所以任取$k$,$1 \le k \le n-1$,$f_k(l)$都是$[m,M]$上的凸函数,$f_k(l) \le f_k(m)$与$f_k(l) \le f_k(M)$两个不等式必有一个成立. 由(5)式得

$$f_k(m) = \{[kM+(n-k)m][(n-k)M^\alpha + km^\alpha]\}/n^2(Mm)^\alpha$$

$$f_k(M) = \{[(k+1)M+(n-k-1)m][(n-k-1)M^\alpha + (k+1)m^\alpha]\}/n^2(Mm)^\alpha = f_{k+1}(m).$$

下面把k看作实数,求出使$f_k(m)$取最大值的k,把$f_k(m)$的分子记做$h(k)$.

$$\begin{aligned}h(k) &= [kM+(n-k)m][(n-k)M^\alpha+km^\alpha] \\ &= k^2Mm^\alpha + (n-k)^2M^\alpha m + k(n-k)\cdot(M^{\alpha+1}+m^{\alpha+1}) = -(M^\alpha-m^\alpha)(M-m)k^2 + n(M^{\alpha+1}+m^{\alpha+1}-2M^\alpha m)k \\ &\quad + n^2M^\alpha m,\end{aligned}$$

它是k的二次函数,记$p = \frac{M}{m}$,$p>1$,$A = p^{\alpha+1}-2p^\alpha+1$,$B = p^{\alpha+1}-2p+1$,则当

$$k = \frac{n(M^{\alpha+1}+m^{\alpha+1}-2M^\alpha m)}{2(M^\alpha-m^\alpha)(M-m)} = \frac{n(p^{\alpha+1}-2p^\alpha+1)}{2(p^\alpha-1)(p-1)} = \frac{nA}{2(p^\alpha-1)(p-1)},$$

即$n-k = \frac{nB}{2(p^\alpha-1)(p-1)}$时,$h(k)$和$f_k(m)$取最大值,将$k = \frac{nA}{2(p^\alpha-1)(p-1)}$代入$h(k) = [kM+(n-k)m][(n-k)M^\alpha+km^\alpha]$,得到$h(k)$的最大值是

$$\begin{aligned}&\frac{n^2}{4(p^\alpha-1)^2(p-1)^2}\times(AM+Bm)(BM^\alpha+Am^\alpha) \\ &= \frac{n^2m^{\alpha+1}}{4(p^\alpha-1)^2(p-1)^2}\times(Ap+B)(Bp^\alpha+A) \\ &= \frac{n^2m^{\alpha+1}}{4(p^\alpha-1)^2(p-1)^2}\times(p^{\alpha+2}-p^{\alpha+1}-p+1)\times(p^{2\alpha+1}-p^{\alpha+1}-p^\alpha+1) \\ &= \frac{n^2m^{\alpha+1}}{4(p^\alpha-1)(p-1)^2}\times(p^{\alpha+1}-1)(p-1)\times(p^{\alpha+1}-1)(p^\alpha-1) \\ &= \frac{n^2m^{\alpha+1}}{4(p^\alpha-1)(p-1)}\times(p^{\alpha+1}-1)^2.\end{aligned}$$

所以$f_k(m)$的最大值是$\frac{(P^{\alpha+1}-1)^2m}{4(p^\alpha-1)(p-1)M^\alpha} = \frac{(M^{\alpha+1}-m^{\alpha+1})^2}{4(M^\alpha-m^\alpha)(M-m)(Mm)^\alpha}$,又因为$f_k(M) = f_{k+1}(m)$,故$f_k(M)$的最大值与此相同.

前面已经说过任取k,$1 \le k \le n-1$,$f_k(l) \le f_k(m)$与$f_k(l) \le f_k(M)$两个不等式必有一个成立,所以任取k,$1 \le k \le n-1$,都有

$$f_k(l) \le \frac{(M^{\alpha+1}-m^{\alpha+1})^2}{4(M^\alpha-m^\alpha)(M-m)(Mm)^\alpha} \tag{6}$$

综合(5),(6),就证明了(4)式.

注1 当$\alpha=1$,由(4)式可得Schweitzer不等式. 所以(4)式是Schweitzer不等式的指数推广.

注2 分析证明过程,(4)式等号成立条件是:(1)$\frac{nA}{2(p^\alpha-1)(p-1)}$是整数,把它记作$k$,$1 \le k \le n-1$;(2)$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\downarrow = (\underbrace{M,\cdots,M}_{k},\underbrace{m,\cdots,m}_{n-k})$.

以下记$K(M,m,\alpha) = (M^{\alpha+1}-m^{\alpha+1})^2/[4(M^\alpha-m^\alpha)(M-m)(Mm)^\alpha]$.

推论1 设$a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,$\alpha>0$,$\beta>0$,$M = max\{a_1,\cdots,a_n\}$,$m = min\{a_1,\cdots,a_n\}m$,$M>m>0$,则

$$\left(\frac{1}{n}\sum a_i^\beta\right)\left(\frac{1}{n}\sum\frac{1}{a_i^\alpha}\right) \le \frac{(M^{\alpha+\beta}-m^{\alpha+\beta})^2}{4(M^\alpha-m^\alpha)(M^\beta-m^\beta)(Mm)^\alpha} \tag{7}$$

证明 在(4)中用a_i^β代替a_i,这时M,m,α应当用$M^\beta,m^\beta,\frac{\alpha}{\beta}$代替,而$K(M^\beta,m^\beta,\frac{\alpha}{\beta}) = \frac{(M^{\alpha+\beta}-m^{\alpha+\beta})^2}{4(M^\alpha-m^\alpha)(M^\beta-m^\beta)(Mm)^\alpha}$,这样就证明了(7).

以下记$L(M,m,\alpha,\beta) = (M^{\alpha+\beta}-m^{\alpha+\beta})/[4(M^\alpha-m^\alpha)(M^\beta-m^\beta)(Mm)^\alpha]$.

定理2 设$0<m \le \gamma_i \le M(i=1,2,\cdots,n)$,$\alpha>0$,$M>m>0$,则

$$\left(\sum\gamma_iu_i^2\right)\left(\sum\frac{u_i^2}{\gamma_i^\alpha}\right) \le K(M,m,\alpha)\left(\sum u_i^2\right)^2 \tag{8}$$

证明 先假定$M = max\{\gamma_1,\cdots,\gamma_n\}$,$m = min\{\gamma_1,\cdots,\gamma_n\}$. 若所有$u_i^2$都是正有理数,当$\sum u_i^2$

$=1$,设 $u_i^2=\frac{k_i}{p}$,k_i,p 是自然数,且 $\sum k_i=p$,以 $(\underbrace{\gamma_1,\cdots,\gamma_1}_{k_1},\cdots,\underbrace{\gamma_n,\cdots,\gamma_n}_{k_n})$ 代替 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,由(4)式得到

$$\left(\frac{1}{p}\sum k_i\gamma_i\right)\left(\frac{1}{p}\sum\frac{k_i}{\gamma_i^\alpha}\right)\le K(M,m,a),$$

即(8)式成立. 当 $\sum u_i^2\neq 1$,以 $\frac{u_i^2}{\sum u_i^2}$ 代替 u_i^2,同样可得到(8)式.

若 u_i^2 不都是正有理数,取 n 个正有理数列 $\{\mu_{i,j}^2\}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots)$,使当 $j\to\infty$,$\mu_{i,j}^2\to u_i^2$,则由前面的证明知

$$\left(\sum\gamma_i\mu_{i,j}^2\right)\left(\sum\frac{\mu_{i,j}^2}{\gamma_i^a}\right)\le K(M,m,a)\left(\sum\mu_{i,j}^2\right)^2$$

$(j=1,2,\cdots)$,令 $j\to\infty$,即得(8)式.

如果 $M\neq max\{\gamma_1,\cdots,\gamma_n\}$ 或 $m\neq min\{\gamma_1,\cdots,\gamma_n\}$,我们可以在集合 $\{\gamma_1,\cdots,\gamma_n\}$ 中添加 $\gamma_{n+1}=M(\gamma_{n+2}=m)$,并令相应的 $u_{n+1}=0(u_{n+2}=0)$,即可归结为前面的情形.

注 3　当 $\alpha=1$,由(8)式可得 Kantorovich 不等式,所以(8)式是 Kantorovich 不等式的指数推广.

推论 2　设 $0<m\le\gamma_i\le M(i=1,2,\cdots,n)$,$\alpha>0,\beta>0,M>m>0$,则

$$\left(\sum\gamma_i^\beta u_i^2\right)\left(\sum\frac{u_i^2}{\gamma_i^\alpha}\right)\le L(M,m,\alpha,\beta)\left(\sum u_i^2\right)^2 \tag{9}$$

以下用 f 表示 $f(x)$,用 $\int_a^b f$ 表示 $\int_a^b f(x)dx$,并以 $\sum_i$ 和 $\sum_j$ 分别表示 $\sum_{i=0}^n$ 和 $\sum_{j=0}^n$,以 $\sum_{i,j}$ 表示 $\sum_i\sum_j$.

定理 3　设 $\alpha>0$, $f\in L[a,b]$, $1/f^\alpha\in L[a,b]$, $0<m\le f(x)\le M(M>m>0)$,又 $p\in L[a,b]$, $0\le p(x)\le P$ 则

$$\left(\int_a^b fp\right)\left(\int_a^b\frac{p}{f^\alpha}\right)\le K(M,m,\alpha)\left(\int_a^b p\right)^2. \tag{10}$$

证明　设 $t_i=m+\frac{i}{n}(M-m)$, $E_{i,j}=\{x:t_i\le f(x)<t_{i+l};\frac{jP}{n}\le p(x)<\frac{(j+1)P}{n}\}$, $E_j=\{x:\frac{jP}{n}\le p(x)<\frac{(j+1)P}{n}\}=\sum_i E_{i,j}$, $i,j=0,1\cdots n$. 由(8)式得

$$\left(\sum_{i,j}t_i\cdot\frac{jp}{n}\cdot m(E_{i,j})\right)\left(\sum_{i,j}\frac{1}{t_i^\alpha}\cdot\frac{jp}{n}\cdot m(E_{i,j})\right)$$
$$\le K(M,m,\alpha)\left(\sum_{i,j}\frac{jp}{n}\cdot m(E_{i,j})\right)^2$$
$$=K(M,m,\alpha)\left(\sum_j\frac{jp}{n}\cdot m(E_j)\right)^2.$$

令 $n\to\infty$,由控制收敛定理[6], $\sum_{i,j}t_i\cdot\frac{jp}{n}\cdot m(E_{i,j})\to\int_a^b fp$, $\sum_{i,j}\frac{1}{t_i^\alpha}\cdot\frac{jp}{n}\cdot m(E_{i,j})\to\int_a^b\frac{p}{f^\alpha}$, $\sum_j\frac{jp}{n}\cdot m(E_j)\to\int_a^b p$. 再由上式即得(10)式.

注 4　(10)是 Kantorovich 不等式的积分形式[2,3]的指数推广.

推论 3　设 $\alpha>0,\beta>0$, $f^\beta\in L[a,b]$, $1/f^\alpha\in L[a,b]$, $0<m\le f(x)\le M(M>m>0)$,又 $p\in L[a,b]$, $0\ge p(x)\ge P$ 则

$$\left(\int_a^b f^\beta p\right)\left(\int_a^b\frac{p}{f^\alpha}\right)\le L(M,m,\alpha,\beta)\left(\int_a^b p\right)^2 \tag{11}$$

北京联合大学石焕南教授,浙江海宁电大张小明老师审阅本文初稿并提出修改意见,作者谨表示感谢.

参 考 文 献

[1] D. S. Mitrinovi c, P. M. Vasi c著,赵汉宾译. 分析不等式[M]. 南宁:广西人民出版社,1986,79～88
[2] 匡继昌. 常用不等式(第三版)[M]. 济南:山东科学技术出版社,2004,163～164
[3] 楼宇同. Schweitzer 不等式,Grüss 不等式的推广及其之间的关系[J]. 曲阜师范大学学报(自然科学版),1991,17(4):24～28
[4] 王伯英. 控制不等式基础[M]. 北京:北京师范大学出版社,1990
[5] 吴善和,石焕南. 一类无理不等式的控制证明[J]. 首都师范大学学报(自然科学版),2003,24(3):13～16
[6] 周民强. 实变函数论[M]. 北京:北京大学出版社,2001
[7] 张小明. 几何凸函数[M]. 合肥:安徽大学出版社,2004:134～145
[8] A. M. Marshall and I. Olkin. Inequalities. Theory of Majorization and Its Application [M]. New York: Academies Press, 1979,71

(下转 96 页)

使植物开花的.

水稻是一种短日植物.农业科学界已经在水稻中找到了几个与开花有关的基因位点,并且找出了三个基因,其中两个是与CO和FT同源的,另一个是用来编码酪蛋白激酶II(CK2)的亚单位.在拟南芥中,CK2是一个与生物钟相关的并且是在它超表达情况下还可以缩短光周期长度的因子.从这些结果我们可以得出了一个结论:生物钟在光周期控制开花过程中起到关键的作用.然而这也给我们提出了一个新的问题:这些相同的基因是如何同时调控长日植物(拟南芥)和短日植物(水稻)开花的?这也是我们需要解决的问题.

参 考 文 献

[1]Thomas F. Schultz, Steve A. Kay. Circadian clocks in daily and seasonal control of development[J]. Science, 2003, 301

[2]Isaac Edery. Circadian rhythms in a nutshell[J]. Physiol Genomics, 2000, 3:59 ~74

[3]李经才,于　多,王　芳,何　颖.生物钟基因研究新进展[J].遗传,2004,26(1):89~96

[4]金　戈.生物节律的分子生物学研究进展[J].国外医学(遗传学分册),1999,22(4):194~198

The Molecular Basis of the Rhythmic Development of the Plant

WU Xiaoyong, SUN Yanxia, ZHAO Gang, GOU Xiaojun, WANG Yuehua

(Department of Biological Engineering, Chengdu University, Chengdu 610106, China)

Abstract: Circadian clock regulates the physical processes of the variety of organisms. This paper mainly discusses the molecular basis of the daily and seasonal change of the plant development and analyses the important role of the circadian clock in the development of the plant.

Key words: Plant; Development; Circadian clock; Gene

(上接83页)

Extension of Kantorovich Inequality

XU Tiequan

(Qingdao Vocational and Technical College, Qingdao 266071, China)

Abstract: Three theorems in the paper extend Schweitzer Inequality and Kantorovich Inequality.

Key words: Schweitzer Inequality; Kantorovich Inequality; Convex Functions; Schur – Convex Functions