D-24　能不能作一个正方形，它的边长是整数，并且在它所在的平面上能指出一个点，使该点到正方形的四个顶点的距离都可用整数表示，

解　用反证法，若有一点 *O*，适合命题条件（图 14)，其中 $k, l_a, l_b, l_c, l_d$ 都是整数，由勾股定理可知

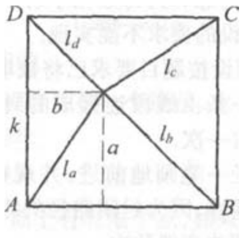

图 14

$l_a^2 = a^2 + b^2$　　①

$l_b^2 = a^2 + (k-b)^2$　　②

$l_c^2 = (k-a)^2 + (k-b)^2$　　③

$l_d^2 = (k-a)^2 + b^2$　　④

其中 $l_d$ 即图中 OD.

(1)据题设，可令 a，b 是整数，这是因为由式①，②可得

$l_b^2 = a^2 + b^2 - 2bk + k^2 = l_a^2 - 2bk + k^2$　　⑤

所以 $b = \dfrac{l_a^2 + k^2 - l_b^2}{2k}$ 是有理数，同理由式①，④得 a 是有理数，所以可把上图放大适当的整数倍数，就可保证点 D 到 AB，AD 的距离是整数.

(2)由式⑤可见，$k^2 - 2bk + l_a^2$ 是整数 $l_b$ 的平方，

又根据判别式 $\Delta = (-2b)^2 - 4l_a^2 = 4b^2 - 4l_a^2 \le 0$ ($\because l_a \ge b$)

可见△=0，即b=$l_c$，这样由式①得a=0，

再代入式③得 $l_c^2 = 2k^2 - 2bk + b^2$,

可见等式右端也可表为两个整数的平方，又由判别式

$\Delta = (-2b)^2 - 4 \cdot 2b^2 = -4b^2 \le 0$

所以必有 $b = 0$，再把 $a = 0$，$b = 0$ 代入式③得 $l_c^2 = k^2 + k^2 = 2k^2$

所以 $\dfrac{l_c}{k} = \sqrt{2}$,

而 $\dfrac{l_c}{k}$ 是有理数. $\sqrt{2}$ 不是有理数，引起矛盾，由此可见，这样的点 *O* 在正方形上及它的内部不可能存在.

(3)与(2)同理，可以证明点 *O* 在正方形的外部也不可能存在。