

海淀区高三年级第二学期期末练习 数 学 (理科)

2013.05

本试卷共 150 分, 考试时间 120 分钟

一. 选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项

1. 集合 $A = \{x | (x-1)(x+2) \leq 0\}$, $B = \{x | x < 0\}$, 则 $A \cup B$ 的值为 ()
 A. $(-\infty, 0]$ B. $(-\infty, 1]$ C. $[1, 2]$ D. $[1, \infty)$
2. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 且 $a_1 \cdot a_3 = 4$, $a_4 = 8$, 则 $a_1 + q$ 的值为 ()
 A. 3 B. 2 C. 3 或 -2 D. 3 或 -3
3. 如图 1, 在边长为 a 的正方形内有不规则图形 Ω . 向正方形内随机撒豆子, 若撒在图形 Ω 内和正方形内的豆子数分别为 m, n , 则图形 Ω 面积的估计值为 ()
 A. $\frac{ma}{n}$ B. $\frac{na}{m}$ C. $\frac{ma^2}{n}$ D. $\frac{na^2}{m}$

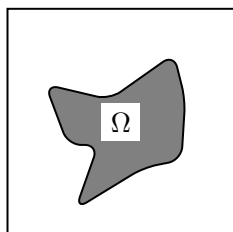


图 1

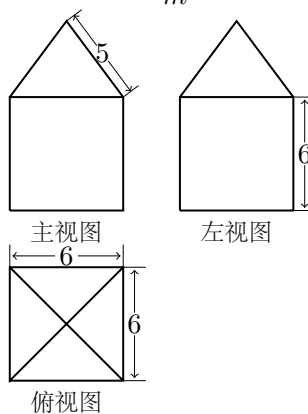


图 2

4. 某空间几何体的三视图如图 2 所示, 则该几何体的表面积为 ()
 A. 180 B. 240 C. 276 D. 300
5. 在四边形 $ABCD$ 中, “ $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, 使得 $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{BC}$ ” 是 “四边形 $ABCD$ 为平行四边形” 的 ()
 A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
6. 用数字 1, 2, 3, 4, 5 组成没有重复数字的五位数, 且 5 不排在百位, 2, 4 都不排在个位和万位, 则这样的五位数的个数为 ()
 A. 32 B. 36 C. 42 D. 48
7. 双曲线 C 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 且 F_2 恰好为抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点, 设双曲线 C 与该抛物线的一个交点为 A , 若 $\triangle AF_1F_2$ 是以 AF_1 为底边的等腰三角形, 则双曲线 C 的离心率为 ()
 A. $\sqrt{2}$ B. $1 + \sqrt{2}$ C. $1 + \sqrt{3}$ D. $2 + \sqrt{3}$

8. 若数列 $\{a_n\}$ 满足:存在正整数 T ,对任意正整数 n 都有 $a_{n+T} = a_n$ 成立,则称数列 $\{a_n\}$ 为周期数列,周期为 T . 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = m(m > 0), a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 1, & a_n > 1, \\ \frac{1}{a_n}, & 0 < a_n \leq 1. \end{cases}$

则下列结论中错误的是 ()

- A. 若 $a_3 = 4$, 则 m 可以取 3 个不同的值
 B. 若 $m = \sqrt{2}$, 则数列 $\{a_n\}$ 是周期为 3 的数列
 C. $\forall T \in \mathbb{N}^*$ 且 $T \geq 2, \exists m > 1$, 使得 $\{a_n\}$ 是周期为 T 的数列
 D. $\exists m \in \mathbb{Q}$ 且 $m \geq 2$, 使得数列 $\{a_n\}$ 是周期数列

二. 填空题:本大题共 6 小题,第小题 5 分,共 30 分. 把答案填在题中横线上

9. 在极坐标系中,极点到直线 $\rho \cos \theta = 2$ 的距离为 _____ .
 10. 已知 $a = \ln \frac{1}{2}, b = \sin \frac{1}{2}, c = 2^{-\frac{1}{2}}$, 则 a, b, c 按从大到小排列为 _____ .
 11. 直线 l_1 过点 $(-2, 0)$ 且倾斜角为 30° , 直线 l_2 过点 $(2, 0)$ 且与直线 l_1 垂直, 则直线 l_1 与 l_2 的交点坐标为 _____ .
 12. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 30^\circ, \angle B = 45^\circ, a = \sqrt{2}$, 则 $b =$ _____, $S_{\triangle ABC} =$ _____ .
 13. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 若动点 P 在线段 BD_1 上运动, 则 $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AP}$ 的取值范围是 _____ .
 14. 在平面直角坐标系中, 动点 $P(x, y)$ 到两条坐标轴的距离之和等于它到点 $(1, 1)$ 的距离, 记点 P 的轨迹为曲线 W .

(I) 给出下列三个结论:

- ① 曲线 W 关于原点对称;
 ② 曲线 W 关于直线 $y = x$ 对称;
 ③ 曲线 W 与 x 轴非负半轴, y 轴非负半轴围成的封闭图形的面积小于 $\frac{1}{2}$.

其中, 所有正确结论的序号是 _____ .

(II) 曲线 W 上的点到原点距离的最小值为 _____ .

三. 解答题, 本大题共 6 小题, 共 80 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤

15. (本小题共 13 分)

已知函数 $f(x) = 1 - \frac{\cos 2x}{\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})}$.

- (I) 求函数 $f(x)$ 的定义域;
 (II) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间.

16. (本小题共 13 分)

福利中心发行彩票的目的是为了获取资金资助福利事业,现在福彩中心准备发行一种面值为 5 元的福利彩票刮刮卡,设计方案如下:(1)该福利彩票中奖率为 50%;(2)每张中奖彩票的中奖金有 5 元,50 元和 150 元三种;(3)顾客购买一张彩票获得 150 元奖金的概率为 p ,获得 50 元奖金的概率为 2%.

- (I) 假设某顾客一次花 10 元购买两张彩票,求其至少有一张彩票中奖的概率;
 (II) 为了能够筹得资金资助福利事业,求 p 的取值范围.

17. (本小题共 14 分)

如图 3,在直角梯形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = \angle DAB = 90^\circ$, $\angle CAB = 30^\circ$, $BC = 2$, $AD = 4$. 把 $\triangle DAC$ 沿对角线 AC 折起到 $\triangle PAC$ 位置,如图 4 所示,使得点 P 落在平面 ABC 上的正投影 H 恰好落在线段 AC 上,连接 PB ,点 E, F 分别为线段 PA, AB 的中点.

- (I) 求证:平面 $EFH \parallel$ 平面 PBC ;
 (II) 求直线 HE 与平面 PHB 所成角的正弦值;
 (III) 在棱 PA 上是否存在一点 M ,使得 M 到 P, H, A, F 四点的距离相等? 请说明理由.

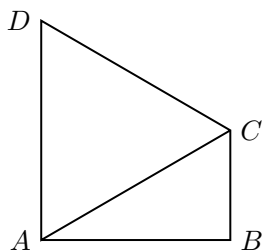


图 3

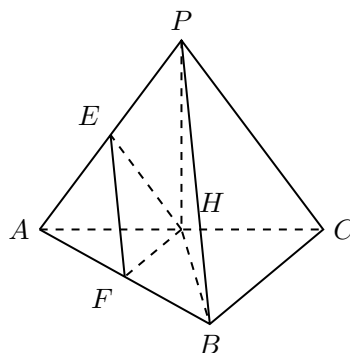


图 4

18. (本小题共 13 分)

已知函数 $f(x) = e^x$, $A(a, 0)$ 为一定点. 直线 $x = t (t \neq a)$ 分别与函数 $f(x)$ 的图象和 x 轴交于点 M, N , 记 $\triangle AMN$ 的面积为 $S(t)$.

- (I) 当 $a = 0$ 时,求函数 $S(t)$ 的单调区间;
 (II) 当 $a > 2$ 时,若 $\exists t_0 \in [0, 2]$,使得 $S(t_0) \geq e$,求 a 的取值范围.

19. (本小题共 14 分)

已知椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的四个顶点恰好是一边长为 2, 一个内角为 60° 的菱形的四个顶点.

(I) 求椭圆 M 的方程;

(II) 直线 l 与椭圆 M 交于 A, B 两点, 且线段 AB 的垂直平分线经过点 $(0, -\frac{1}{2})$, 求 $\triangle AOB$ (O 为原点) 面积的最大值.

20. (本小题共 13 分)

设 A 是由 $m \times n$ 个实数组成的 m 行 n 列的数表, 如果某一行(或某一列)各数之和为负数, 则改变(或该列)中所有数的符号, 称为一次“操作”.

(I) 数表 A 如表 1 所示, 若经过两次“操作”, 使得到的数表每行的各数之和与每列的各数之和均为非负实数, 请写出每次“操作”后所得到的数表(写出一种方法即可);

1	2	3	-7
-2	1	0	1

表 1

(II) 数表 A 如表 2 所示, 若必须经过两次“操作”, 才可使得到的数表每行的各数之和与每列各数之和均为非负整数, 求整数 a 的所有可能值;

a	$a^2 - 1$	$-a$	$-a^2$
$2 - a$	$1 - a^2$	$a - 2$	a^2

表 2

(III) 对由 $m \times n$ 个实数组成的 m 行 n 列的任意一个数表 A , 能否经过有限次“操作”以后, 使得到的数表每行各数之和与每列各数之和均为非负实数? 请说明理由.