

# 海淀区高三年级第二学期期末练习 数 学 (理科)

2013.05

本试卷共 150 分, 考试时间 120 分钟

一. 选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项

1. 集合  $A = \{x | (x-1)(x+2) \leq 0\}$ ,  $B = \{x | x < 0\}$ , 则  $A \cup B$  的值为 ( )  
 A.  $(-\infty, 0]$       B.  $(-\infty, 1]$       C.  $[1, 2]$       D.  $[1, \infty)$
2. 已知数列  $\{a_n\}$  是公比为  $q$  的等比数列, 且  $a_1 \cdot a_3 = 4$ ,  $a_4 = 8$ , 则  $a_1 + q$  的值为 ( )  
 A. 3      B. 2      C. 3 或 -2      D. 3 或 -3
3. 如图 1, 在边长为  $a$  的正方形内有不规则图形  $\Omega$ . 向正方形内随机撒豆子, 若撒在图形  $\Omega$  内和正方形内的豆子数分别为  $m, n$ , 则图形  $\Omega$  面积的估计值为 ( )  
 A.  $\frac{ma}{n}$       B.  $\frac{na}{m}$       C.  $\frac{ma^2}{n}$       D.  $\frac{na^2}{m}$

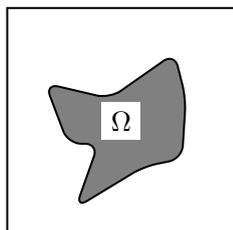


图 1

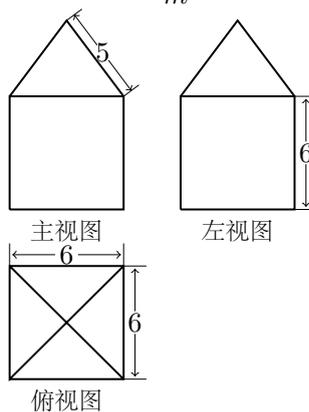


图 2

4. 某空间几何体的三视图如图 2 所示, 则该几何体的表面积为 ( )  
 A. 180      B. 240      C. 276      D. 300
5. 在四边形  $ABCD$  中, “ $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ , 使得  $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{DC}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{BC}$ ” 是 “四边形  $ABCD$  为平行四边形” 的 ( )  
 A. 充分而不必要条件      B. 必要而不充分条件  
 C. 充分必要条件      D. 既不充分也不必要条件
6. 用数字 1, 2, 3, 4, 5 组成没有重复数字的五位数, 且 5 不排在百位, 2, 4 都不排在个位和万位, 则这样的五位数的个数为 ( )  
 A. 32      B. 36      C. 42      D. 48
7. 双曲线  $C$  的左右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 且  $F_2$  恰好为抛物线  $y^2 = 4x$  的焦点, 设双曲线  $C$  与该抛物线的一个交点为  $A$ , 若  $\triangle AF_1F_2$  是以  $AF_1$  为底边的等腰三角形, 则双曲线  $C$  的离心率为 ( )  
 A.  $\sqrt{2}$       B.  $1 + \sqrt{2}$       C.  $1 + \sqrt{3}$       D.  $2 + \sqrt{3}$

8. 若数列  $\{a_n\}$  满足:存在正整数  $T$ ,对任意正整数  $n$  都有  $a_{n+T} = a_n$  成立,则称数列  $\{a_n\}$  为周期数列,周期为  $T$ . 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = m(m > 0), a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 1, & a_n > 1, \\ \frac{1}{a_n}, & 0 < a_n \leq 1. \end{cases}$

则下列结论中错误的是 ( )

- A. 若  $a_3 = 4$ ,则  $m$  可以取 3 个不同的值
- B. 若  $m = \sqrt{2}$ ,则数列  $\{a_n\}$  是周期为 3 的数列
- C.  $\forall T \in \mathbb{N}^*$  且  $T \geq 2, \exists m > 1$ ,使得  $\{a_n\}$  是周期为  $T$  的数列
- D.  $\exists m \in \mathbb{Q}$  且  $m \geq 2$ ,使得数列  $\{a_n\}$  是周期数列

二. 填空题:本大题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分. 把答案填在题中横线上

9. 在极坐标系中,极点到直线  $\rho \cos \theta = 2$  的距离为 \_\_\_\_\_.

10. 已知  $a = \ln \frac{1}{2}, b = \sin \frac{1}{2}, c = 2^{-\frac{1}{2}}$ ,则  $a, b, c$  按从大到小排列为 \_\_\_\_\_.

11. 直线  $l_1$  过点  $(-2, 0)$  且倾斜角为  $30^\circ$ ,直线  $l_2$  过点  $(2, 0)$  且与直线  $l_1$  垂直,则直线  $l_1$  与  $l_2$  的交点坐标为 \_\_\_\_\_.

12. 在  $\triangle ABC$  中, $\angle A = 30^\circ, \angle B = 45^\circ, a = \sqrt{2}$ ,则  $b =$  \_\_\_\_\_,  $S_{\triangle ABC} =$  \_\_\_\_\_.

13. 在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 1,若动点  $P$  在线段  $BD_1$  上运动,则  $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AP}$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

14. 在平面直角坐标系中,动点  $P(x, y)$  到两条坐标轴的距离之和等于它到点  $(1, 1)$  的距离,记点  $P$  的轨迹为曲线  $W$ .

(I) 给出下列三个结论:

- ① 曲线  $W$  关于原点对称;
- ② 曲线  $W$  关于直线  $y = x$  对称;
- ③ 曲线  $W$  与  $x$  轴非负半轴, $y$  轴非负半轴围成的封闭图形的面积小于  $\frac{1}{2}$ .

其中,所有正确结论的序号是 \_\_\_\_\_.

(II) 曲线  $W$  上的点到原点距离的最小值为 \_\_\_\_\_.

三. 解答题,本大题共 6 小题,共 80 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤

15. (本小题共 13 分)

已知函数  $f(x) = 1 - \frac{\cos 2x}{\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})}$ .

- (I) 求函数  $f(x)$  的定义域;
- (II) 求函数  $f(x)$  的单调递增区间.

16. (本小题共 13 分)

福利中心发行彩票的目的是为了获取资金资助福利事业,现在福彩中心准备发行一种面值为 5 元的福利彩票刮刮卡,设计方案如下:(1)该福利彩票中奖率为 50%;(2)每张中奖彩票的中奖金有 5 元,50 元和 150 元三种;(3)顾客购买一张彩票获得 150 元奖金的概率为  $p$ ,获得 50 元奖金的概率为 2%.

- (I) 假设某顾客一次花 10 元购买两张彩票,求其至少有一张彩票中奖的概率;  
 (II) 为了能够筹得资金资助福利事业,求  $p$  的取值范围.

17. (本小题共 14 分)

如图 3,在直角梯形  $ABCD$  中, $\angle ABC = \angle DAB = 90^\circ$ , $\angle CAB = 30^\circ$ , $BC = 2$ , $AD = 4$ . 把  $\triangle DAC$  沿对角线  $AC$  折起到  $\triangle PAC$  位置,如图 4 所示,使得点  $P$  落在平面  $ABC$  上的正投影  $H$  恰好落在线段  $AC$  上,连接  $PB$ ,点  $E, F$  分别为线段  $PA, AB$  的中点.

- (I) 求证:平面  $EFH \parallel$  平面  $PBC$ ;  
 (II) 求直线  $HE$  与平面  $PHB$  所成角的正弦值;  
 (III) 在棱  $PA$  上是否存在一点  $M$ ,使得  $M$  到  $P, H, A, F$  四点的距离相等? 请说明理由.

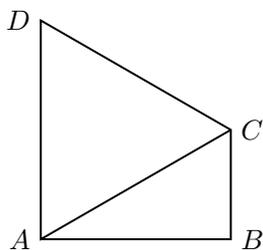


图 3

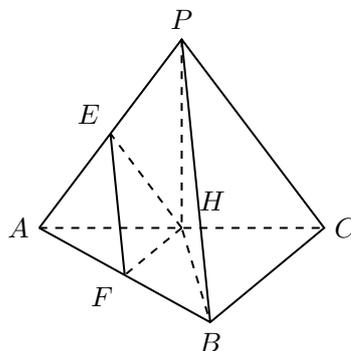


图 4

18. (本小题共 13 分)

已知函数  $f(x) = e^x$ ,  $A(a, 0)$  为一定点. 直线  $x = t (t \neq a)$  分别与函数  $f(x)$  的图象和  $x$  轴交于点  $M, N$ , 记  $\triangle AMN$  的面积为  $S(t)$ .

- (I) 当  $a = 0$  时,求函数  $S(t)$  的单调区间;  
 (II) 当  $a > 2$  时,若  $\exists t_0 \in [0, 2]$ ,使得  $S(t_0) \geq e$ ,求  $a$  的取值范围.

19. (本小题共 14 分)

已知椭圆  $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的四个顶点恰好是一边长为 2, 一个内角为  $60^\circ$  的菱形的四个顶点.

(I) 求椭圆  $M$  的方程;

(II) 直线  $l$  与椭圆  $M$  交于  $A, B$  两点, 且线段  $AB$  的垂直平分线经过点  $(0, -\frac{1}{2})$ , 求  $\triangle AOB$  ( $O$  为原点) 面积的最大值.

20. (本小题共 13 分)

设  $A$  是由  $m \times n$  个实数组成的  $m$  行  $n$  列的数表, 如果某一行(或某一列)各数之和为负数, 则改变(或该列)中所有数的符号, 称为一次“操作”.

(I) 数表  $A$  如表 1 所示, 若经过两次“操作”, 使得到的数表每行的各数之和与每列的各数之和均为非负实数, 请写出每次“操作”后所得到的数表(写出一种方法即可);

1	2	3	-7
-2	1	0	1

表 1

(II) 数表  $A$  如表 2 所示, 若必须经过两次“操作”, 才可使得到的数表每行的各数之和与每列各数之和均为非负整数, 求整数  $a$  的所有可能值;

$a$	$a^2 - 1$	$-a$	$-a^2$
$2 - a$	$1 - a^2$	$a - 2$	$a^2$

表 2

(III) 对由  $m \times n$  个实数组成的  $m$  行  $n$  列的任意一个数表  $A$ , 能否经过有限次“操作”以后, 使得到的数表每行各数之和与每列各数之和均为非负实数? 请说明理由.