题：已知函数$f(x)=(x^3+2x^2+5x+t)e^{-x},t\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R}$.（1）当$t=5$时，求函数$y=f(x)$ 的单调区间；（2）若存在实数$t\in[0,1]$，使对任意的$x\in[-4,m]$，不等式$f(x)\le x$成立，求整数m的最大值.

海淀3月部分学校高三联考试题倒数第三题；这题第（2）问有超过北京课标之嫌，偶对第（2）求得的结果是0，但并不能完全肯定。我觉得试题还是有一定的代表性，若求导，则导数的零点是个难点，但如2012年广州高三一模也有类似的函数导数不等式综合大题。故，最终还是发了上来，班门弄斧，抛砖引玉，主要是向大家学习，先谢。

分析与解：

（1）增区间$(-\infty,0)$，减区间$(0,+\infty)$;

（2）据以往经验，若函数的导函数还要继续求导，往往各自相应的零点或者取最值条件巧同。而此题不是。如果我们能在有限的时间里，不借用计算器，大约将函数的图象画出来，数与形结合，将会明朗许多。而，偶认为求极值，判断与零的大小关系，其本质上就是在作图了。函数作图，就肯定涉及函数的凹凸性，亦，二次求导，这，超出了高中导数范围，虽对导函数再求导只是一句话的事，但，如果出现了定义概念之类，那就又带来了许多新的问题。

回到第（2）问，先化简看看再说：

$$\begin{aligned}f(x)\le x &\iff (x^3+2x^2+5x+t)e^{-x}\le x\\&\iff x^3+2x+5x+t\le xe^x\\&\iff t\le xe^x-x^3-2x^2-5x \qquad (1)\end{aligned}$$

这里很容易验证，$t\in[0,1]$，当$x=0$（此时有$t=0$）不等式(1) 是成立的。更重要的一方面，这样便将变量与参数分离开了，且不看题中的自变量范围，先。

$$\exists t\in[0,1],\forall x\in\mathbf{R},t\le xe^x-x^3-2x^2-5x \iff 0\le xe^x-x^3-2x^2-5x$$

再结合题设条件$x\in[-4,m]$，

若$x\in[-4,0)$（即$x<0$)则

$$\begin{aligned}&0\le xe^x-x^3-2x^2-5x\\\iff &0\ge e^x-x^2-2x-5 \qquad (2)\end{aligned}$$

对不等式(2) ，$x\in[-4,0)$是否成立问题已经很常规了，即讨论函数$F(x)=e^x-x^2-2x-5,x\in[-4,0)$上的最大值与零的大小！但是这里有个问题，就是导函数的零点无法求出，列表讨论极值出现困难。

不过，一眼看下去，立刻得$x\in[-4,0),F'(x)=e^x-2x-2,(F''(x)=e^x-2<0)$即

此时函数$F'(x)$在$x\in[-4,0)$上单调递减，

故$F'(x)=0$有惟一解，

不防令$F'(x)$零点为x_0，（言外之意即是说：$x\in[-4,x_0),F'(x)>0\cdots$

即令$F'(x_0)=e^{x_0}-2x_0-2=0\Rightarrow e^{x_0}=2x_0+2$

再看$F(x)$，有$F(x)$在$[-4,x_0)$单调递增，在$[x_0 0)$单调递减（有极大值这里即最大值）。

此时可以在稿纸，或者脑袋里画一个$x\in[-4,0),F(x)$草图，再结合要证明的不等式(2)，很自然的计算$F(x_0)=e^{x_0}-x_0^2-2x_0-5=2x_0+2-x_0^2-2x_0-5=-x_0^2-3<0$，亦不等式(2)成立。

从而$m\ge 0$。

最后，若$x > 0$则

$$
\begin{aligned}
& 0 \leq xe^x - x^3 - 2x^2 - 5x \\
\iff & 0 \leq e^x - x^2 - 2x - 5
\end{aligned}
$$

即讨论函数$F(x) = e^x - x^2 - 2x - 5, x \in (0, +\infty)$上的最小值与零的大小。讨论方法与$x \in [4, 0)$大同小异，不过，这里求整数$m$的最大值，注意到$F(1) = e - 1 - 2 - 5 < 0$，这就意味着$m < 1$.

综上，整数m的最大值为0。