**题目 1.1.8.** （2011 广东理数 20）设 $b>0$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=b,\ a_n=\dfrac{nba_{n-1}}{a_{n-1}+2n-2}$（$n\geqslant 2$）。

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）证明：对于一切正整数 $n$，$a_n\leqslant \dfrac{b^{n+1}}{2^{n+1}}+1$。

第（1）问易求出 $a_n=\begin{cases}2, & b=2,\\ \dfrac{nb^n(b-2)}{b^n-2^n}, & b\neq 2。\end{cases}$（过程从略），以下只证第（2）问。

**解** 当 $b=2$ 时不等式显然成立，下设 $b=2c$，其中 $c>0$ 且 $c\neq 1$，则

$$a_n\leqslant \frac{b^{n+1}}{2^{n+1}}+1 \iff \frac{nb^n(b-2)}{b^n-2^n}\leqslant \frac{b^{n+1}}{2^{n+1}}+1 \iff c^{n+1}+1-\frac{2nc^n(c-1)}{c^n-1}\geqslant 0,$$

如果 $c>1$，则不等式等价于

$$(c^n-1)(c^{n+1}+1)-2nc^n(c-1)\geqslant 0,$$

如果 $c<1$，则不等式等价于

$$(c^n-1)(c^{n+1}+1)-2nc^n(c-1)\leqslant 0,$$

构造函数

$$f(c)=(c^n-1)(c^{n+1}+1)-2nc^n(c-1),$$

显然 $f(x)$ 连续且 $f(1)=0$，可见我们只要证明 $f(c)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调递增即可。求导可得

$$f'(c)=(2n+1)c^{n-1}\big(c^{n+1}-(n+1)c+n\big),$$

由均值不等式易见 $c^{n+1}+n\geqslant (n+1)c$[①]，因此 $f'(c)\geqslant 0$，故原不等式得证。 □

---

① 如果不想用均值，这一步也可以继续求导一步搞定。