一道数学竞赛题的直接证明

蒋明斌

四川省蓬安中学　637851

2008年全国高中数学联赛江西预赛第14题为

设 x,y,z 为非负实数，满足 $xy+yz+zx=1$，证明：

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\ge\frac{5}{2}. \tag{1}$$

最近文[1]给出了如下证明.

为使所证式有意义，x,y,z 三数中至多有一个为 0；据对称性，不妨设 $x\ge y\ge z\ge 0$，则 $x>0,\ y>0,z\ge 0$，对正数 x,y 作调整.

由于 $\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\ge\frac{2}{\sqrt{(y+z)(z+x)}}=\frac{2}{\sqrt{1+z^2}}$，取等号当且仅当 $x=y$，此时条件式成为 $x^2+2xz=1$，则 $x\le 1$，且有 $z=\frac{1-x^2}{2x}$，于是

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\ge\frac{1}{2x}+\frac{2}{\sqrt{1+z^2}}=\frac{1}{2x}+\frac{4x}{1+x^2},$$

只要证 $\frac{1}{2x}+\frac{4x}{1+x^2}\ge\frac{5}{2}$，即 $1+9x^2-5x-5x^3\ge 0$，也即 $(1-x)(5x^2-4x+1)\ge 0$，此为显然，取等号当且仅当 $x=y=1,z=0$，故命题得证.

这一证明显然存在问题，实际上只证明了当 $x=y$ 时，不等式（1）成立.

这一证明也是命题人在竞赛后给出的答案，后来命题人发现存在问题，在书[2]中作了修订，基本思路是：①记 $f(x,y,z)=\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}$，先证当 $x=y$ 时不等式（1）成立，即 $f(x,x,z)\ge\frac{5}{2}$；②对满足条件的任意 x,y,z，不妨设 $x\ge y\ge z$，令 $x=\cot A,\ y=\cot B$，以 A,B 为内角构作 ΔABC，则 $\cot C=z$，由 $x\ge y\ge z$ 得 $A\le B\le C\le 90^\circ$，将 ΔABC 调整为 $\Delta A'B'C$，其中 $A'=B'=\frac{A+B}{2}$，令 $t=\cot\frac{A+B}{2}=\tan\frac{C}{2}$，先证明 $f(x,y,z)=f(\cot A,\cot B,\cot C)\ge f(t,t,z)$，再利用①的结论即得证.这一证明属于调整法，但很繁琐，用了差不多5页.

此题为一陈题，其另一形式：“设 x,y,z 为非负实数，满足 $xy+yz+zx=1$，求 $f(x,y,z)=\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}$ 的最小值”曾作为2003届数学奥林匹克中国国家队培训题.[3]中给出了两种解法，一种属调整法，通过证明 $f(x,y,z)\ge f(0,x+y,\frac{1}{x+y})$ 求得；另一种是通过消元、变形化为一元函数，利用单调性求得最小值.

本文给出一种直接的证明.

证明．设 $p=x+y+z$，注意到

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}=\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}$$

$$=\frac{(p-x)(p-y)+(p-y)(p-z)+(p-z)(p-x)}{(p-x)(p-y)(p-z)}$$

$$=\frac{p^2-(x+y)p+xy+p^2-(y+z)p+yz+p^2-(z+x)p+zx}{p^3-(x+y+z)p^2+(xy+yz+zx)p-xyz}$$

$$=\frac{3p^2-2(x+y+z)p+xy+yz+zx}{p-xyz}=\frac{p^2+1}{p-xyz}$$

不等式（1）等价于

$$2(p^2+1)\ge 5(p-xyz)\Leftrightarrow 2p^2-5p+2+5xyz\ge 0. \qquad (2)$$

不妨设 $x\ge y\ge z$，则 $0\le yz\le\frac{1}{3}$，由（1）取等号当且仅当 $x=y=1, z=0$，此时 $p=x+y+z=2$，则

$$2p^2-5p+2+5xyz=2(p-2)^2+3p+5xyz-6.$$

要证明（2）只需证

$$3p+5xyz-6=3(x+y+z)+5xyz-6\ge 0. \qquad (3)$$

由 $xy+yz+zx=1$，有 $x=\frac{1-yz}{y+z}$，代入(3)得

$$3(x+y+z)+5xyz-6=3\times\frac{1-yz}{y+z}+3(y+z)+5yz\times\frac{1-yz}{y+z}-6$$

$$=\frac{3(y+z)^2-6(y+z)+3+2yz-5(yz)^2}{y+z}=\frac{3(y+z-1)^2+2yz(1-\frac{5}{2}yz)}{y+z}\ge 0.$$

最后一不等式成立是因为 $0\le yz\le\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{5}{2}yz\le\frac{5}{6}<1\Rightarrow 2yz(1-\frac{5}{2}yz)\ge 0$，所以（3）成立，故（1）成立.

参考文献

[1]童其林，例谈新课标高考数学考点：不等式选讲，数学通讯（上半月），2009年第9期，
[2]中国数学会普及工作委员会组编，高中数学联赛备考手册，华东师大出版社，2009年1月.
[3]走向IMO－数学奥林匹克试题集锦(2003)（p24-p27），华东师范大学出版社，2003年8月.